PROBLEME GEOMETRIE ANALITICA PREGATIRE ADMITERE MARTIE 2020

Partea I+Partea II

(a) Considerații teoretice

Diverse ecuații ale dreptei în plan

Ecuația generală a dreptei

$Ax + By + C = 0, A, B, C \in R, A^2 + B^2 \neq 0$

Cazuri particulare

(i) $C = 0, A \neq 0, B \neq 0, Ax + By = 0$ - dreaptă ce trece prin originea axelor de coordonate,

(ii) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, By + C = 0$ - dreaptă paralelă cu axa Ox,

(iii) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0, Ax + C = 0$ - dreaptă paralelă cu axa Oy,

(iv) $x = 0, y = 0$ - ecuațiile axelor de coordonate Oy respectiv Ox.

Ecuația explicită a dreptei sau ecuația dreptei ce conține coeficientul său unghiular și ordonata la origine

$y = mx + n$, $m = tg\alpha$ panta sau coeficientul unghiular, n - ordonata la origine.

Ecuația dreptei prin tăieturi

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a, b - tăieturile dreptei pe axele Ox respectiv Oy.

Ecuația dreptei determinată două puncte $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ distincte

(M_1M_2) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$

Daca $x_1 = x_2$ atunci ecuația dreptei este $x = x_1$ (este o dreapta paralela cu Oy).

Daca $y_1 = y_2$ atunci ecuația dreptei este $y = y_1$ (este o dreapta paralela cu Ox).

Ecuația dreptei determinată două puncte $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ distincte, sub formă de determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Condiția de coliniaritate a trei puncte $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

sau

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2

Unghiul a două drepte

Fie dreptele $(d_1)\ y = m_1 x + n_1, (d_2) y = m_2 x + n_2$, $tg\alpha_1 = m_1, tg\alpha_2 = m_2$.

Fie $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_2 > \alpha_1$,- măsura unghiului format de cele două drepte, atunci

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Distanța de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreapta $(\delta)\ Ax + By + C = 0$

$$d(M_0(x_0, y_0), (\delta)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate de două drepte

Fie dreptele

$(d_1) A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, (d_2) A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$,

atunci ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate de cele două drepte sunt

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = 0 \ .$$

Poziția relative a două drepte în plan

Fie dreptele $\begin{cases}(d_1)\ A_1x+B_1y+C_1=0\\(d_2)\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$, atunci

$$\begin{gathered}(d_1)\|(d_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\\(d_1)\perp(d_2)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0\end{gathered} \ .$$

Fie dreptele $\begin{cases}(d_1)\ y=m_1x+n_1\\(d_2)\ y=m_2x+n_2\end{cases}$ atunci

$$\begin{gathered}(d_1)\|(d_2)\Leftrightarrow m_1=m_2, n_1\neq n_2\\(d_1)\perp(d_2)\Leftrightarrow m_1m_2=-1\end{gathered} \ .$$

(b) Aplicații

(543) Fie punctele $A(\lambda,1), B(2,3), C(3,-1)$. Să se determine λ a.î. punctul A să se afle pe dreapta determinate de punctele B și C.

Soluție

Metoda I. A să se afle pe dreapta determinate de punctele B și C ⇔ punctele A, B, C coliniare ⇔

$$\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\x_B & y_B & 1\\x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 4\lambda-10=0\Leftrightarrow \lambda=\frac{5}{2}.$$

Metoda I. A să se afle pe dreapta determinate de punctele B și C ⇔ punctele A, B, C coliniare ⇔

$$\frac{\lambda-2}{3-2}=\frac{1-3}{-1-3}\Rightarrow\lambda=\frac{5}{2}.$$

***

(558) Laturile AB, BC,CA ale triunghiului ABC au respective ecuațiile

$x+21y-22=0, 5x-12y+7=0, 4x-33y+146=0$.

Distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la latura BC este.

Soluție

Determinăm coordonatele vârfurilor triunghiului.

A $\begin{cases} x+21y=22 \\ 4x-33y=-146 \end{cases} \Rightarrow A(-20,2)$, B $\begin{cases} x+21y=22 \\ 5x-12y=-7 \end{cases} \Rightarrow B(1,1)$,C $\begin{cases} 5x-12y=-7 \\ 4x-33y=-146 \end{cases} \Rightarrow C(13,6)$

Centrul de greutate al triunghiului ABC este atunci punctul $G(-2,3)$.

Ca urmare $d(G(-2,3),(BC))=\dfrac{|-2\cdot 5-12\cdot 3+7|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{39}{13}=3$.

Se dau punctele A(0,1), B(-1,0), C(6,2) și D(1,1).

(559) Simetricul punctului C față de dreapta AB este

Soluție

Sciem ecuația dreptei AB ca fiind ecuația dreptei prin tăieturi

(AB) $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{1}=0 \Rightarrow (AB)y=x+1$.

Fie $(d)\perp(AB) \Rightarrow (d)y=-x+n$, $C(6,2)\in(d) \Rightarrow 2=-6+n \Rightarrow n=8$.

Deci ecuația dreptei (d) ce trece prin C(6,2) și este ortogonală pe dreapta (AB) este

$$(d)\ y=-x+8.$$

Aflăm punctul C_0 de intersecție dintre dreapta (d) și dreapta (AB)

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 8 \end{cases} \Rightarrow C_0\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

Punctul C_0 este mijlocul segmentului CC_1, unde C_1 este simetricul punctului C față de dreapta (AB).

Atunci $\begin{matrix} \frac{7}{2} = \frac{x_{C_1} + 6}{2} \Rightarrow x_{C_1} = 1 \\ \frac{9}{2} = \frac{y_{C_1} + 2}{2} \Rightarrow y_{C_1} = 7 \end{matrix} \Rightarrow C_1(1,7).$

(560) Coordonatele punctului $M \in AB$, pt. care suma $DM + MC$ este minimă este

<u>*Soluție*</u>

Determinăm punctul D_1 simetricul lui D față de dreapta (AB).

Fie dreapta $(d_1) \perp (AB) \Rightarrow \begin{cases} (d_1) y = -x + n \\ D(1,1) \in (d_1) \end{cases} \Rightarrow 1 = -1 + n \Rightarrow n = 2 \Rightarrow (d_1) y = -x + 2$.

Fie D_0 punctul de intersecție dintre dreapta (d_1) și (AB)

Avem atunci

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} = \frac{x_{D_1} + 1}{2} \\ \frac{3}{2} = \frac{y_{D_1} + 1}{2} \end{matrix} \Rightarrow D_1(0,2).$$

Suma DM+MC este minimă dacă $M \in (D_1C) \Rightarrow M = (AB) \cap (D_1C)$

$$M\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1,2).$$

(561) Coordonatele punctului $M \in AB$, pt. care suma $DM^2 + MC^2$ este minimă sunt.

Soluție

Fie $M(x,y) \in (AB)\ y = x + 1 \Rightarrow M(x, x+1)$

$$DM^2 = (x-1)^2 + x^2, MC^2 = (x-6)^2 + (x-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow DM^2 + MC^2 = 2(x-1)^2 + (x-6)^2 + x^2 = 4x^2 - 16x + 38.$$

Fie $f(x) = 4x^2 - 16x + 38$, $f'(x) = 8x - 16 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M(2,3)$

***

Se consideră în planul xOy punctele S(0,12), T(16,0) și $Q(x,y)$ un punct variabil situat pe segmentul $[ST]$. Punctele P și R aparțin axelor de coordonate a.î. patrulaterul OPQR să fie dreptunghi.

(562) Ecuația dreptei ST este

Soluție

Sciem ecuația dreptei ST prin tăieturi

$$(ST)\frac{x}{16} + \frac{y}{12} = 1 \Rightarrow (ST)\ 3x + 4y - 48 = 0 \Rightarrow (ST)\ y = -\frac{3}{4}x + 12$$

(563)Aria dreptunghiului OPQR este

Soluție

$$\sigma_{OPQR} = xy = x\left(-\frac{3}{4}x + 12\right) = 12x - \frac{3}{4}x^2.$$

(564) Valoarea maxima a ariei dreptunghiului OPQR este

Soluție

$\sigma'(x) = -\frac{3}{2}x + 12 = 0 \Rightarrow x = 8,$.

$\sigma_{\max} = \sigma(8) = 96 - 48 = 48$

***

Punctul A(-4,1) este un vârf al pătratului ABCD parcurs în sens direct trigonometric, căruia îi cunoaștem o diagonală de ecuație $3x - y - 2 = 0$.

(565) Aria pătratului ABCD este

<u>*Soluție*</u>

Diagonala BD are deci ecuația $(BD) 3x - y - 2 = 0$, sau $y = 3x - 2$.

Fie r$= d\left(A(-4,1),(BD)\right) = \frac{|-4\cdot 3+1\cdot(-1)-2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$.

Dar aria pătratului ABCD este $\sigma = 2r^2 = 2\cdot\frac{225}{10} = 45.$

(566) Punctul C are coordonatele

<u>*Soluție*</u>

Punctul C este simetricul lui A față de dreapta BD.

Fie $(\delta) \perp (BD) \Rightarrow \begin{cases}(\delta) y = -\frac{x}{3} + n \\ A(-4,1) \in (\delta)\end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow n = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\delta) y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$

Fie $D_0 = (\delta) \cap (BD) \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow D_o\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$

D_0 este mijlocul segmentului AC, ca urmare

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{x_C - 4}{2} &\Rightarrow x_C = 5 \\ -\frac{1}{2} = \frac{y_C + 1}{2} &\Rightarrow y_C = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(5,-2)$$

***

Fie în planul xOy punctele A(4,0),B(5,1),C(1,5),D(0,4).

(567) Patrulaterul ABCD este

<u>*Soluție*</u>

Prin raționament pe desen rezultă ABCD- dreptunghi.

(568) Aria patrulaterului este

<u>*Soluție*</u>

$\sigma_{ABCD} = AD \cdot AB = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$

(569) Simetricul punctului A față de dreapta BC este punctul de coordonate

<u>*Soluție*</u>

De fapt simetricul lui A față de dreapta BC, este punctul A_1 simetricul lui A față de B, deci B este mijlocul segmentului AA_1. Ca urmare

$$\left.\begin{aligned} 5 = \frac{x_{A_1} + 4}{2} &\Rightarrow x_{A_1} = 6 \\ 1 = \frac{y_{A_1}}{2} &\Rightarrow y_{A_1} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1(6,2)$$

***

(570) În sistemul cartezian xOy, o dreaptă variabilă (d) care conține punctul A(0,5) intersectează dreptele $(d_1)x-2=0, (d_2)x-3=0$, în punctele B și C. Să se determine panta m a dreptei (d) a.î. segmentul BC să aibă lungime minimă.

<u>*Soluție*</u>

Metoda(i)

$$A(0,5)\in(d)y=mx+n\Rightarrow 5=n\Rightarrow(d)y=mx+5$$

$$\left.\begin{array}{l}(d)\cap(d_1)=B\Rightarrow B(2,2m+5)\\(d)\cap(d_2)=C\Rightarrow C(3,3m+5)\end{array}\right\}\Rightarrow BC=\sqrt{1+m^2}\Rightarrow BC-\min\Leftrightarrow m=0.$$

Metoda (ii)

Dreptele $(d_1),(d_2)$ fiind paralele cu axa Oy , lungimea segmentului BC va fi minimă dacă și numai dacă dreapta (d), ce trece prin punctul A va fi ortogonala pe cele două drepte, adică va fi paralelă cu axa Ox.

Ca urmare ecuația dreptei (d) este $(d)y=5\Rightarrow m=0$.

***

(571) Fie dreapta $(d)x+y=0$ și punctele A(4,0), B(0,3). Valoarea minimă a sumei MA^2+MB^2, când $M\in(d)$ este.

<u>*Soluție*</u>

$$M\in(d)y=-x\Rightarrow M(x,-x)\Rightarrow MA^2=(x-4)^2+x^2, MB^2=x^2+(x+3)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2=4x^2-2x+25=S(x)\Rightarrow S'(x)=8x-2=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\min}=S\left(\frac{1}{4}\right)=25-\frac{1}{4}=\frac{99}{4}$$

***

Se consideră expresia $E(x,y)=x^2+y^2-6x-10y$.

(572)Distanța de la punctul (x,y) la punctul $(3,5)$ este.

Soluție

$d((x,y),(3,5))=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{x^2+y^2-6x-10y+34}=\sqrt{E(x,y)+34}$.

(573) Valoarea minimă a lui $E(x,y),(x,y)\in R^2$, este.

Soluție

$E(x,y)=(x-3)^2+(y-5)^2-34$ va fi minimă dacă și numai dacă $\begin{array}{l} x-3=0 \\ y-5=0 \end{array}$.

Deci $E_{\min}=E(3,5)=-34$.

(574) Se consideră mulțimea $D=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2-2y\leq 0\}$. Valoarea maximă a lui $E(x,y),(x,y)\in D$.

Soluție

Ecuația generală a cercului centrat în punctul $A(\alpha,\beta)$ și rază $r\rangle 0$ este

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

Apelând la metoda identificării coeficienților nedeterminați, obținem

$$\alpha=0,\beta=1,r=1.$$

Ca urmare $x^2+y^2-2y=0$, este cercul centrat în punctul $A(0,1)$ și rază $r=1$.

$E(x,y) - \max. \Leftrightarrow d((x,y),(3,5)) - \max.$

Ecuația dreptei ce trece prin punctele $(3,5),(0,1)$ este

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 1.$$

Determinăm punctele de intersecție dintre această dreaptă și cercul de mai sus

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right).$$

Distanța $d((x,y),(3,5)) - \max., (x,y) \in D \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Deci $E_{\max} = E\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{25} + \frac{1}{25} + \frac{18}{5} - 2 = 2$.

* * *

În planul xOy se consideră punctele A(3,0) și B(0,4).

(732) Distanța de la originea planului la dreapta (AB) este.

Soluție

Scriem ecuația dreptei (AB) , ca ecuația dreptei prin tăieturi

$$(AB)\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow (AB) 4x + 3y - 12 = 0,$$
$$d((0,0),(AB)) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{12}{5}.$$

(733) Ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$ este.

Soluție

Fie D mijlocul segmentului $[AB]$ Atunci $D\left(\frac{3+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = D\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Dreapta (AB) are ecuația explicită $(AB) y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Fie $(\delta)\perp(AB)\Rightarrow\begin{cases}(\delta)y=\frac{3}{4}x+n\\ D\left(\frac{3}{2},2\right)\in(\delta)\end{cases}\Rightarrow(\delta)y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}\Rightarrow(\delta)6x-8y+7=0$.

***

Se consideră punctele A(0,3),B(1,0) și C(6,1)

(694) Coordonatele mijlocului segmentului $[AC]$ sunt.

<u>*Soluție*</u>

$\left(\frac{0+6}{2},\frac{3+1}{2}\right)\equiv(3,2)$.

(695) Coordonatele punctului D pt. care ABCD este paralelogram sunt.

<u>*Soluție*</u>

Fie $Q(3,2)$ mijlocul segmentului $[AC]$, ca urmare D trebuie să fie simetricul lui B față de Q.

$$\begin{matrix}3=\frac{x_D+1}{2}\Rightarrow x_D=5\\ 2=\frac{y_D+0}{2}\Rightarrow y_D=4\end{matrix}\Rightarrow D(5,4).$$

(696) Centrul de greutate al triunghiului ABC are coordonatele.

<u>*Soluție*</u> $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)\equiv G\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$.***

12

Se consideră punctul $A(-1,1)$ și dreapta $(d)x-y=2$.

(683) Simetricul lui A față de origine este.

<u>*Soluție*</u>

$O(0,0)$ fiind mijlocul segmentului $[AA_1]$ avem

$$0=\frac{x_{A_1}-1}{2}\Rightarrow x_{A_1}=1$$
$$0=\frac{y_{A_1}+1}{2}\Rightarrow y_{A_1}=-1,\Rightarrow A_1(1,-1).$$

(684) Distanța de la punctul A la dreapta *(d)* este.

<u>*Soluție*</u>

Avem $d(A(-1,1),(d))=\frac{|-1\cdot 1-1\cdot 1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

(685) Simetricul lui A față de dreapta *(d)* este.

<u>*Soluție*</u>

Fie $(\delta)\perp(d)\Rightarrow\begin{cases}(\delta)y=-x+n\\ A(-1,1)\in(\delta)\end{cases}\Rightarrow n=0\Rightarrow(\delta)y=-x$.

Fie $A_0=(d)\cap(\delta)\Rightarrow\begin{cases}y=x-2\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow A_0(1,-1)$.

A_0 fiind mijlocul segmentului AA_2, unde A_2 este simetricul lui A față de dreapta *(d)* , avem

$$\left.\begin{aligned}1&=\frac{x_{A_2}-1}{2}\Rightarrow x_{A_2}=3\\ -1&=\frac{y_{A_2}+1}{2}\Rightarrow y_{A_2}=-3\end{aligned}\right.\Rightarrow A_2(3,-3).$$

***