Pregătire admitere 2020

Prof.univ.dr. Alexandru Ioan MITREA

Asist.univ.dr. Liana TIMBOŞ

PRIMITIVE

Definiţia 1. *Fie $g : I \to \mathbb{R}$, I-interval. Funcţia g admite primitive pe I dacă există $G : I \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:*

1. *G este derivabilă pe I;*
2. *$G'(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.*

Metoda de integrare prin părţi

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx,$$

unde $f, g \in \mathbb{C}^1(I)$.

Problema 1. (i) Să se calculeze $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx, x \in \mathbb{R}$. (Simulare 2009)

(ii) Să se calculeze $I = \int_{-1}^{1} \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$. (Simulare 2018, Problema 749/Ed. 2019)

Rezolvare. (i) Se consideră $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ şi $g'(x) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \\ g(x) &= x. \end{aligned}$$

Se aplică formula de integrare prin părţi şi avem

$$\begin{aligned} \int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

(ii) Fie $F(x) = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$.

Atunci, $I = F(1) - F(-1) = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-1) = \ln(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \ln 1 = 0$.

□

Observaţie. *1. Funcţia f este impară, într-adevăr,*

$$\begin{aligned} f(-x) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) &= \ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -f(x). \end{aligned}$$

Deci, $I = 0$.

2. Similar, $\int_{-a}^{a} \ln(x^n+\sqrt{x^{2n}+1})dx = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ impar, $\forall a > 0$.

Problema 2. Să se calculeze $\int x\ln(1-x)dx$, $x \in (-\infty, 1)$.

Rezolvare. Calculăm o primitivă a funcţiei $f(x) = x\ln(1-x)$ folosind formula de integrare prin părţi. Alegem $f(x) = \ln(1-x)$ şi $g'(x) = x$. Calculăm $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$ şi $g(x) = \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Atunci, folosind formula de integrare prin părţi avem că:

$$\begin{aligned}
\int x\ln(1-x)dx &= \frac{x^2}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1-x}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{x-1}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\int x+1+\frac{1}{x-1}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln|1-x| - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \mathcal{C} \\
&= \ln|1-x|(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

□

Observaţie. *Problema aceasta apare în culegere ca* $\lim_{a\to 1}\int_0^a x\ln(1-x)dx$, $a \in (0,1)$. *Pentru a rezolva această integrală vom considera o primitivă* F *a funcţiei* f, *şi anume pentru* $\mathcal{C} = 0$. *Vom avea că* $\int_0^a x\ln(1-x)dx = F(a) - F(0) = \ln(1-a)(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}$. *Vom calcula şi limita cerută, adică:*

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1}\int_0^a x\ln(1-x)dx &= \lim_{a\to 1}\frac{\ln(1-a)}{2}(a-1)(a+1) - \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \lim_{a\to 1}\frac{\ln(1-a)}{\frac{1}{a-1}} \\
&= -\frac{3}{4} + \lim_{a\nearrow 1}\frac{-\frac{1}{1-a}}{-\frac{1}{(a-1)^2}} \\
&= -\frac{3}{4} + \lim_{a\nearrow 1} -(a-1) \\
&= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Schimbare de variabilă

Problema 3. (i) Să se calculeze $\int \sqrt{\frac{x}{1+x^3}}dx, x \in (0, +\infty)$.

(ii) Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1+x^3}}dx$. (Simulare 2018; problema 751/Ed. 2019)

Rezolvare. (i) Fie F o primitivă pentru f, $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^3}}, x \in \mathbb{R}_+^*$.

Vom face substituţia $x^{\frac{3}{2}} = t$. Prin diferenţiere obţinem $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx = dt$. Înlocuind, se obţine:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{2}{3}\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Revenind la integrala iniţială, avem că $F(x) = \frac{2}{3}\ln(x\sqrt{x} + \sqrt{1+x^3}) + \mathcal{C}$.

(ii) $I = F(1) - F(0) = \frac{2}{3}\ln(1 + \sqrt{2})$.

□

Problema 4. Să se calculeze $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$, $x \in (0, 1)$.

Rezolvare. Fie F o primitivă a funcţiei f, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x \in (0, 1)$.

Propunem spre rezolvare două variante.

I. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{x} = t$, şi prin diferenţiere obţinem că $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$. Atunci $F(t) = \int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + \mathcal{C}$, deci $F(x) = 2\arcsin\sqrt{x} + \mathcal{C}$.

II. Rescriem integrala astfel: $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}dx = \arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \mathcal{C}_1 = \arcsin(2x-1) + \mathcal{C}_1$.

□

Observaţie. *1. Din I şi II rezultă că funcţiile* $g(x) = 2\arcsin\sqrt{x}$ *şi* $h(x) = \arcsin(2x-1)$, $x \in [0,1]$, *au aceeaşi derivată pe* $(0,1)$, *anume* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. *Aşadar, există* $k \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $f(x) - g(x) = k$, $\forall x \in [0,1]$. *Pentru* $x = 0$ *rezultă* $k = g(0) - h(0) = \frac{\pi}{2}$, *deci* $2\arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + \arcsin(2x-1)$, $0 \le x \le 1$.

2. Să calculăm integrala $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$, *dată la Admiterea din anul 2014. Avem:*

$$I = 2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = 2(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$$

sau,

$$I = \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = 0 - \arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}.$$

Integrale raţionale

Problema 5. Să se calculeze $\int \frac{x+1}{2x^2-2x+1}dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Rescriem integrala astfel (ideea este să ne construim derivata numitorului la numărător pentru a putea aplica formula $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + \mathcal{C}$):

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{2x^2-2x+1}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{4x+4-2+2}{2x^2-2x+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{6}{2x^2-2x+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\ln|2x^2-2x+1| + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{2}}dx \\
&= \frac{1}{4}\ln|2x^2-2x+1| + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}dx \\
&= \frac{1}{4}\ln|2x^2-2x+1| + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\text{arctg}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{4}\ln|2x^2-2x+1| + \frac{3}{2}\text{arctg}\,(2x-1) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

□

Problema 6. Să se calculeze $\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx$, $x \in [0, +\infty)$.

Rezolvare. Considerăm F, o primitivă a funcţiei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$.

$$F(x) = \int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx = \int \frac{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}{x^2(\frac{1}{x^2}+1+x^2)}dx.$$

Vom face substituţia $t = x - \frac{1}{x}, x > 0$. Prin diferenţiere avem $dt = (1 + \frac{1}{x^2})dx$, iar dacă ridicăm la pătrat obţinem $t^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$, deci putem considera

$$F(t) = \int \frac{dt}{t^2+3}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{t}{\sqrt{3}},$$
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}, x \in (0, +\infty).$$

Pentru intervalul $x \in [0, +\infty]$, avem:

$$F(x) = \begin{cases} \mathcal{C} & , x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} & , x > 0 \end{cases}.$$

Deoarece F este continuă pe $[0, +\infty]$ rezultă că

$$\mathcal{C} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } (-\infty) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Deci,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} & , x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} & , x > 0 \end{cases}.$$

□

Observaţie. *1. O primitivă a funcţiei $f(x)$ se poate calcula utilizînd metoda* *standard astfel:*

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} &= \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}\\ &= \frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-x+1)+(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1})\\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}],\end{aligned}$$

deci

$$G(x)=\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}});x\in\mathbb{R}.$$

2. *Să se calculeze* $I=\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx$*; problema a fost dată la Simularea din anul 2017 (Problema 717/Ed. 2019).*

Rezolvare. Avem:

$I=\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx=F(1)-F(0)=0-(-\frac{\pi}{2\sqrt{3}})=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$

sau,

$I=G(1)-G(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

Problema 7. Fie $f_n:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{x(x^n+1)}$ şi $I_n=\int f_n(x)dx$.

(i) Calculaţi I_1;

(ii) Calculaţi I_2;

(iii) Calculaţi I_3 (Problema 438/Ed. 2019);

(iv) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 f_n(x)dx$.

Rezolvare. (i)

$$I_1 = \int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \frac{x+1-x}{x(x+1)}dx = \int (\frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)})dx$$
$$= \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx = \ln x - \ln(x+1) + \mathcal{C} = \ln \frac{x}{x+1} + \mathcal{C}.$$

(ii)

$$I_2 = \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{x}{x^2(x^2+1)}dx.$$

Fie F_2 o primitivă pentru $f_2(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$. Facem substituţia $x^2 = t$. Prin diferenţiere avem că $2xdx = dt$, prin urmare,

$$F_2(t) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{2}\ln \frac{t}{t+1},$$
$$F_2(x) = \frac{1}{2}\ln \frac{x^2}{x^2+1},$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\ln \frac{x^2}{x^2+1} + \mathcal{C}.$$

(iii)

$$I_3 = \int \frac{1}{x(x^3+1)}dx = \int \frac{x^2}{x^3(x^3+1)}dx.$$

Fie F_3 o primitivă pentru $f_3(x) = \frac{1}{x(x^3+1)}$. Facem substituţia $x^3 = t$. Prin diferenţiere avem că $3x^2dx = dt$, deci,

$$F_3(t) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{3}\ln \frac{t}{t+1},$$
$$F_3(x) = \frac{1}{3}\ln \frac{x^3}{x^3+1},$$
$$I_3 = \frac{1}{3}\ln \frac{x^3}{x^3+1} + \mathcal{C}.$$

(iv) Fie $F_n(x)$ o primitivă pentru $f_n(x)$. Atunci,

$$F_n(x) = \int \frac{1}{x(x^n+1)}dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+1)}dx$$

Facem substituţia $x^n = t$ şi prin diferenţiere rezultă $nx^{n-1}dx = dt$. Atunci,

$F_n(t) = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{n}\int \frac{t+1-t}{t(t+1)}dx = \frac{1}{n}\ln\frac{t}{t+1}$, prin urmare, $F_n(x) = \frac{1}{n}\ln\frac{x^n}{x^n+1}$.

(O altă metodă este să facem substituţia $\frac{1}{x} = t$.)

Calculăm

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n}\ln\frac{x^n}{x^n+1}|_1^2\\ &= \lim_{n\to\infty}[\ln\frac{2^n}{2^n+1} - \ln\frac{1}{2}]\\ &= \ln 1 + \ln 2 = \ln 2.\end{aligned}$$

□

Problema 8. (i) Să se calculeze $\int \frac{x-x^2}{(x^2+1)(x^3+1)}dx$, $x \in [0, +\infty]$.

(ii) Să se calculeze $L = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x-x^2}{(x^2+1)(x^3+1)}dx$. (Admitere 2019)

Rezolvare. (i) Avem

$$\begin{aligned}\frac{x-x^2}{(x^2+1)(x^3+1)} &= \frac{(x+x^4)-(x^4+x^2)}{(x^2+1)(x^3+1)}\\ &= \frac{x(1+x^3)-x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^3+1)}\\ &= \frac{x}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^3+1}\end{aligned}$$

deci,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{x^2}{x^3+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + \mathcal{C}\\ &= \frac{1}{6}\ln(x^2+1)^3(x^3+1)^{-2} + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} F(n) - F(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \ln \frac{(n^2+1)^3}{(n^3+1)^2} \\ &= \frac{1}{6} \ln \lim_{n\to\infty} \frac{n^6+3n^4+3n^2+1}{n^6+2n^3+1} \\ &= \frac{1}{6} \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

□

Observaţie. *O generalizare a integralei de la (i) este următoarea:*

Fie $a, b \geq 1$ şi $x \in [0, +\infty]$; avem

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{(x^a+1)(x^b+1)} dx &= \int \frac{(x^{b-1}+x^{a+b-1})-(x^{a+b-1}+x^{a-1})}{(x^a+1)(x^b+1)} dx \\ &= \int \frac{x^{b-1}}{x^b+1} dx - \int \frac{x^{a-1}}{x^a+1} dx \\ &= \frac{1}{b} \ln(x^b+1) - \frac{1}{a} \ln(x^a+1) + \mathcal{C} \\ &= \frac{1}{ab} \ln \frac{(x^b+1)^a}{(x^a+1)^b} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Integrale trigonometrice

Problema 9. Să se calculeze $\int_0^{4\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$.

Rezolvare.

$$I = \int_0^{4\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = 2\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} = 4\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$$

Pentru aceste egalităţi am aplicat periodicitatea funcţiei cos, proprietatea

$$\int_x^{x+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

unde f este o funcţie periodică de perioadă T, şi de asemenea proprietatea funcţiilor pare pe un interval $[-a, a]$.

Fie $F(x)$ o primitivă a funcţiei $f(x) = \frac{1}{5+4\cos x}$, deci $F(x) = \int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

Facem substituţia $t = \tan\frac{x}{2} \implies x = 2\arctan t$. Prin diferenţiere obţinem că $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Ştim din formule trigonometrice că $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$F(t) = \int \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} = \frac{2}{t^2+9}dt = \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3} \Rightarrow$$
$$F(x) = \frac{2}{3}\arctan\frac{tg\frac{x}{2}}{3}, \text{ pentru } x \in [0,\pi).$$

$$F(x) = \begin{cases} \mathcal{C} & , x = \pi \\ \frac{2}{3}\arctan\frac{tg\frac{x}{2}}{3} & , x \in [0,\pi) \end{cases}.$$

Deoarece F este continuă pe $[0,\pi]$ rezultă că

$$\mathcal{C} = \lim_{x\searrow\pi}\frac{2}{3}\text{arctg}\,\frac{\tan\frac{x}{2}}{3} = \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3},$$

deci,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & , x = \pi \\ \frac{2}{3}\arctan\frac{tg\frac{x}{2}}{3} & , x \in [0,\pi) \end{cases}.$$

Revenind la integrala iniţială, avem că $I = 4(F(\pi) - F(0)) = 4(\frac{\pi}{3} - 0) = \frac{4\pi}{3}$.

□

Problema 10. Să se calculeze $\int(\tan^{n+2}x + \tan^n x)dx$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Rezolvare.

$$I = \int(\tan^{n+2}x + \tan^n x)dx = \int \tan^n x(\tan^2 x + 1)dx$$
$$= \int \tan^n x(\tan x)'dx = \frac{\tan^{n+1}x}{n+1} + \mathcal{C}.$$

Am folosit că $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$.

□

Problema 11. Să se calculeze $\int (\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}) dx$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Rezolvare.

$$
\begin{aligned}
I &= \int (\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}) dx \\
&= \int (\tan x)' \tan^2 x dx = \frac{\tan^3 x}{3} + \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

□

Alte tipuri de integrale

Problema 12. Să se calculeze $\int_{-2}^{0} \frac{x}{\sqrt{e^x + (x+2)^2}} dx$.

Rezolvare.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^{0} \frac{x}{\sqrt{e^x + (x+2)^2}} dx = \int_{-2}^{0} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}} \sqrt{1 + (\frac{x+2}{e^{\frac{x}{2}}})^2}} dx \\
&= \int_{-2}^{0} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} \sqrt{1 + (x+2)^2 e^{-x}} dx.
\end{aligned}
$$

Facem substituţia $(x+2)e^{-\frac{x}{2}} = t$. Diferenţiem relaţia şi obţinem $-\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = dt \Longrightarrow x e^{-\frac{x}{2}} = -2dt$. Schimbăm şi capetele şi dacă $x = 1 \Longrightarrow t = 2$, iar pentru $x = -2 \Longrightarrow t = 0$.

$$
I = \int_{0}^{2} \frac{-2}{\sqrt{1+t^2}} dx = -2 \ln(t + \sqrt(1 + t^2))|_0^2 = -2 \ln(2 + \sqrt{5}).
$$

□

Problema 13. Să se calculeze $\int \frac{e^x (x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$. (Problema 439/ Ed. 2019)

Rezolvare. Avem:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2}dx\\ &= \int \frac{e^x}{x^2+1}dx - \int e^x \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx\\ &= \int \frac{e^x}{x^2+1}dx + \int e^x \cdot (\frac{1}{x^2+1})'dx\\ &= \int \frac{e^x}{x^2+1}dx + e^x\frac{1}{x^2+1} - \int \frac{e^x}{x^2+1}dx\\ &= e^x(x^2+1)^{-1} + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

□

Problema 14. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x+x+1}dx$. (Simulare admitere 2018; problema 752/Ed. 2019)

Rezolvare. Fie $f(x) = e^x + x + 1 \Rightarrow f'(x) = e^x + 1$, deci $f(x) - f'(x) = x$. Astfel,

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}dx = \int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1}\frac{f'(x)}{f(x)}dx\\ &= 2 - \ln f(x)|_{-1}^{1} = 2 - [\ln(e+2) - \ln\frac{1}{e}] = 2 - \ln(e+2) - 1\\ &= 1 - \ln(e+2) = \ln 2 - \ln(e+2)\\ &= \ln\frac{e}{e+2}.\end{aligned}$$

□

Observaţie. *Similar se calculează integrala* $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}dx, x \in [0,+\infty)$ *(Problema 441/Ed. 2019):* $f(x) = e^x + \cos x + \sin x$*;* $e^x + \cos x = \frac{1}{2}(f(x) + f'(x))$.